

*Fragen und Antworten  
zum Strukturgleichungsmodell*

**Übungsaufgaben zur linearen Regression 2**

---

---

**Übungsaufgaben zur Faktorenanalyse und zum Maximum-Likelihood-Prinzip 5**

---

---

**Übungsaufgaben zur CFA mit LISREL 8**

---

---

**Übungsaufgaben zur Vertiefung 9**

---

---

**Übungsaufgaben für die nächste Sitzung 11**

---

---

**Übungsaufgaben Modell-Fit 12**

---

---

**Übungsaufgaben: Vollständiges Modell 13**

---

---

**Übungsaufgaben Multi Group 14**

---

---

**Längsschnittliche Modelle 15**

Veranstaltung: 12616, „Einführung in die Analyse von Strukturgleichungsmodellen“

Dozent: L. Satow

Name: Marita Schneider, Natalie Klein, Ulla Herrmann, Bert Krause

## Übungsaufgaben zur linearen Regression

### 1. Wie lautet die Formel der linearen Regressionsgeraden in ihrer allgemeinen Form?)

Bei einem stochastischen Zusammenhang zwischen zwei Variablen  $y$  und  $x$  ist es möglich, die eine jeweils aus der anderen vorherzusagen. Dabei wird eine lineare Beziehung zwischen den intervallskalierten Variablen angenommen. Als Prädiktor wird die Variable bezeichnet, die zur Vorhersage herangezogen wird. Sie entspricht in etwa der unabhängigen Variable beim Experiment. Die zu schätzende Variable wird als Kriterium bezeichnet (ähnlich der abhängigen Variable im Experiment).

Die Regressionsgleichung ist die Gerade, die die Gesamtheit aller Punkte am besten wiedergibt, sie kann sowohl eine positive als auch eine negative Steigung annehmen.

Die allgemeine Form der Regressionsgleichung lautet:

$$\text{Regressionsgleichung: } \hat{y}_i = b \cdot x_i + a$$

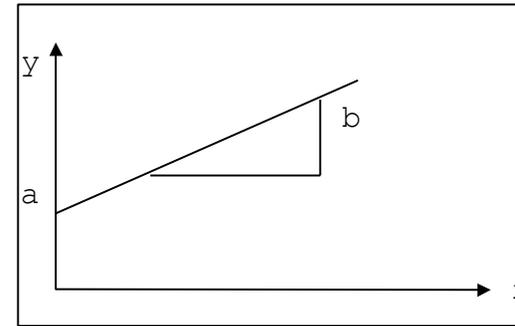
$\hat{y}_i$  ... der  $i$ -te  $y$ -Wert (geschätzter Wert, Kriterium)

$b$  ... Steigung der Geraden

$x_i$  ... der  $i$ -te  $x$ -Wert (Prädiktor)

$a$  ... die Höhenlage bzw. der Schnittpunkt der Geraden auf der  $y$ -Achse.

Die Regressionsgerade kann auch graphisch dargestellt werden.



### 2. Was wird unter der Methode der „kleinsten Quadrate“ verstanden? Was wird in dieser Methode minimiert?

Bei jeder Schätzung von  $y$  aus  $x$  treten Schätzfehler auf. Diese sollten jedoch so gering wie möglich ausfallen, d.h. die Abweichung des wahren  $y_i$ -Wertes vom geschätzten  $\hat{y}$ -Wert soll möglichst gering sein ( $(y_i - \hat{y}) \rightarrow \min!$ ).

Eine Regressionsgerade ist die Gerade bei der die Summe der quadrierten Quadrate, also die Summe der quadrierten Abweichungen von geschätztem und wahren Wert am geringsten ist

$$\left( \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 \rightarrow \min! \right).$$

Sie erfüllen damit das Prinzip der kleinsten Quadrate.

**3. Welches sind die wesentlichen Voraussetzungen für die lineare Regression?**

**(a) Allgemeine Voraussetzungen:**

1. repräsentative Stichprobe
2. Verteilung der x-Werte muß normalverteilt sein
3. Verteilung der y-Werte muß normalverteilt sein
4. Die zu einem x-Wert gehörenden y-Werte (Arrayverteilung) müssen normalverteilt sein
5. Die zu einem y-Wert gehörenden x-Werte (Arrayverteilung) müssen normalverteilt sein
6. Die Mittelwerte der Arrayverteilung müssen auf einer Geraden liegen

**(b) Inferenzstatistische Voraussetzungen:**

1. Die Regressionsgleichung muß an einer repräsentativen Stichprobe ermittelt werden
2. y und x sind intervallskalierte Variablen
3. y und x sind stochastisch unabhängig
4. der Zufallsfehler ist normalverteilt und unabhängig vom Kriterium, sein Erwartungswert ist Null
5. die Berechnung des Kriteriums erfolgt ohne Meßfehler
6. x und y haben eine bivariate Normalverteilung, dazu gehört auch, daß die zu den  $x_i$ -Werten gehörenden  $y_i$ -Werte normalverteilt sein müssen, weiterhin müssen die Streuungen der einzelnen zu den  $x_i$ -Werten gehörenden  $y_i$ -Werte normalverteilt sein (Homoskedastizität der Arrayverteilungen) und die zu einem  $x_i$ -Wert

gehörenden  $y_i$ -Werte müssen voneinander unabhängig sein. (vgl Bortz, 1993, S. 176)

**4. Was ist ein  $\beta$ -Gewicht und worin unterscheidet es sich vom normalen Regressionskoeffizienten?**

Regressionsgleichungen werden auf der Grundlage einer repräsentativen Stichprobe bestimmt, um sie auf Untersuchungseinheiten, die nicht zur Stichprobe, aber zur Population gehören, anwenden zu können. Damit eine Kriteriumsvariable sinnvoll durch eine Prädiktorvariable vorhergesagt werden kann, muß die für eine Stichprobe gefundene Regressionsgleichung auf die zugrundeliegende Grundgesamtheit generalisierbar sein. (Bortz, 1993, S. 175)

$$\hat{y}_j^* = \beta_{yx} \cdot x_j + \alpha_{yx}$$

Als  $\beta$ -Koeffizienten werden jene standardisierten Koeffizienten bezeichnet, die als optimale Gewichtungsfaktoren der einzelnen Variablen in die multiple Regression eingehen. Die  $\beta$ -Gewichte werden so bestimmt, daß die Regressionsgleichung die Kriteriumsvariable möglichst genau vorhersagt (auch hier wird die Regressionsgleichung nach dem Kriterium der kleinsten Quadrate festgelegt). Der Wertebereich des Beta-Koeffizienten liegt zwischen -1 und +1 und ermöglicht so den Vergleich verschiedener Beta-Koeffizienten. Im Gegensatz dazu ist der b-Koeffizient nicht standardisiert.

**5. Was versteht man unter  $R^2$  ? Warum berechnet man auch das adjustet  $R^2$ ?**

R ist der multiple Korrelationskoeffizient, er entspricht dem bei einer bivariaten Produkt-Moment-Korrelation berechneten  $r_{xy}$  und gibt den Zusammenhang zwischen k Prädiktorvariablen und einer Kriteriumsvariablen an. Er kann einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen. Zwischen vorhergesagten  $\hat{y}_{im}$ -Werten und erhobenen  $y_{im}$ -Werten kann eine bivariate Produkt-Moment-Korrelation ermittelt werden. Das Ergebnis ist eine multiple Korrelation R.

$R^2$  schätzt denjenigen Varianzanteil der Kriteriumsvariablen, der durch die Prädiktorvariablen erklärt wird.

$R^2 \cdot 100$  entspricht dem Anteil der gemeinsamen Varianz zwischen Kriteriumsvariablen und den Prädiktorvariablen. Es wird der Anteil der Varianz der Kriteriumsvariablen geschätzt, der von den Prädiktoren vorhergesagt wird.

Sind eine große Anzahl von Prädiktorvariablen bei nur geringem Stichprobenumfang vorhanden, überschätzt die multiple Korrelation nach untenstehenden Gleichungen den wahren multiplen Zusammenhang.

$$R_{c_{12}} = \sqrt{b_1 \cdot r_{1c} + b_2 \cdot r_{2c}}$$

$$R_{c_{12}} = R = \sum_{i=1}^k b_i \cdot r_{ic}$$

Daher wird eine Schrumpfungskorrektur notwendig. Sie soll die Überschätzung des wahren multiplen Zusammenhanges durch eine Stichprobenkorrelation kompensieren (auch Adjusted  $R^2$ ). z.B. OLKIN und PRATT (1958)

$$\hat{R} = \left(\frac{n-3}{n-k-1}\right) * [(1-R^2) + \left(\frac{2}{n-k+1}\right) * (1-R^2)^2]$$

Entsteht ein negativer  $\hat{R}^2$ , besteht in der Population kein Zusammenhang zwischen den Prädiktorvariablen und der Kriteriumsvariablen. (Sowohl R als auch  $R^2$  können nur positive Werte annehmen.)

**6. Worauf weist ein  $R^2$  von 0.30 im Rahmen der linearen Regressionsanalyse hin?**

Ein  $R^2$  von .30 bedeutet, daß die Prädiktoren der multiplen Korrelation insgesamt 30 % der gemeinsamen Varianz aufklären. Das Quadrat der multiplen Korrelation ( $R^2$ ) kann also analog zum einfachen Determinationskoeffizienten interpretiert werden.

**7. Was sind erwartungstreue Schätzer?**

Erwartungstreue ist ein Kriterium der Parameterschätzung: Ein statistischer Kennwert schätzt einen Populationsparameter erwartungstreu, wenn das arithmetische Mittel der Kennwerteverteilung bzw. deren Erwartungswert dem Populationsparameter entspricht. (Bortz 1993, S.93)

**8. Was wird unter Multicollinearity verstanden? Wie kann Multicollinearity untersucht werden?**

Unter Multikollinearität (Multicollinearity) versteht man die wechselseitige Abhängigkeit von Variablen im Kontext multivariater Verfahren (vgl. Bortz, 1993, S. 419)

Multikollinearität beeinträchtigt den Einsatz der multiplen Korrelation auf dreifache Weise:

- bei extremer Multikollinearität ist die rechnerische Genauigkeit der  $\beta$ -Gewichtschätzung gefährdet
- Multikollinearität kann zu Verzerrungen der Teststatistiken führen
- Multikollinearität erschwert die Interpretation der  $\beta$ -Gewichte.

Strukturkoeffizienten sind Kennziffern, die die Interpretation einer multiplen Regressionsgleichung erleichtern, sie beschreiben den Zusammenhang zwischen den Prädiktorvariablen und der vorhergesagten Kriteriumsvariable. Die Strukturkoeffizienten lassen sich berechnen, indem man die Einzelkorrelationen durch die multiple Korrelation dividiert.

Nun stehen zur Interpretation der multiplen Regressionsgleichung zwei verschiedene Indices mit verschiedenen Aussagen zur Verfügung:

Das  **$\beta$ -Gewicht**, dem zu entnehmen ist, welchen Beitrag eine einzelne Prädiktorvariable im Kontext aller übrigen Prädiktorvariablen zur Klärung der tatsächlichen Prädiktorvarianz leistet.

Der **Strukturkoeffizient**, der angibt, welchen Anteil eine Prädiktorvariable an der vorhergesagten Kriteriumsvarianz hat, ohne Berücksichtigung der übrigen Prädiktorvariablen.

### **Übungsaufgaben zur Faktorenanalyse und zum Maximum-Likelihood-Prinzip**

#### ***1. Welche Arten von Faktorenanalysen gibt es? Was ist das Anliegen der Faktorenanalyse?***

Einem größeren Datensatz soll eine ordnende Struktur unterlegt werden. Dabei soll eine Datenreduktion erfolgen, ohne daß viel Information verloren geht. Die explorative FA wird verwendet, wenn ein einfaches Erklärungsmodell für die wechselseitigen Beziehungen vieler Variablen gesucht wird. Dabei wird aus Korrelationen zwischen den Variablen eine synthetische Variable bzw. mehrere Variablen (Faktoren) extrahiert. Aufgrund dieser sollen Hypothesen zur inhaltlichen Deutung des Zusammenhanges geprüft werden (FA ist ein heuristisches und datentenreduzierend Verfahren). Es werden Faktorextraktionsverfahren (z.B. Hauptachsenmethode von Hotelling, 1933), Faktorrotationsverfahren und Faktoranalytische Modelle (z.B. Modell mehrerer gemeinsamer Faktoren von Thurstone, 1947) unterschieden. Eine Unterteilung ist auch in explorative und konfirmatorische Modelle möglich.

#### ***2. Was ist der Unterschied zwischen einer explorativen und einer konfirmatorischen Faktorenanalyse?***

Der Aussagewert der Faktorenanalyse hängt davon ab, welchen Stellenwert sie im Forschungsprogramm hat: Wenn sie als empirische Grundlage zur Stützung von Theorien dienen sollen, dann ist eine theoretisch begründete sorgfältige Auswahl der Variablen sehr wichtig. Die exploratorische Faktorenanalyse, z.B. Hauptkomponentenanalyse von Hotelling und Kelley wird benutzt, wenn über die faktorielle Struktur der Daten keine oder nur sehr allgemein formulierte Hypothesen vorliegen. Dabei kann zwar die Anzahl der extrahierten Faktoren festgelegt werden, aber nicht welche Faktoren extrahiert werden sollen.

Die konfirmatorische Faktorenanalyse dient der Überprüfung von spezifischen Hypothesen über die faktorielle Struktur eines Datensatzes. Sie geht auf Jöreskog, 1973, zurück. Sie beruht auf der

Maximum-Likelihood-Methode. Dabei sollen Hypothesen über die Faktorenstruktur eines Datensatzes getestet werden. Diese Hypothesen beziehen sich auf die Anzahl der Faktoren und die Ladungsmuster der Variablen. Hypothetisch vorgegebene Ladungsmuster aus einer empirisch ermittelten Ladungsmatrix oder theoretisch begründete Angaben über die Größe der Ladungen der Variablen werden in Anpassungstests überprüft.

### 3. Was kann mittels eines Bartlett-Tests überprüft werden?

Es soll überprüft werden, ob eine empirisch ermittelte Korrelationsmatrix sich signifikant von der Identitäts- bzw. Einheitsmatrix unterscheidet. Für eine Hauptkomponentenanalyse u.a. FA werden als Ausgangsmaterial Korrelationsmatrizen verwendet (bei LISREL wird eine Kovarianzmatrix verwendet). Wenn keine Abweichungen zwischen empirischer Korrelationsmatrix und Einheitsmatrix vorhanden sind, sind die Variablen in der Population unkorreliert, somit eine Faktorenanalyse nicht sinnvoll. Tests für diese Überprüfung kommen von Steiger, 1980, Brien et. al, 1984 Wilson u. Martin, 1983 (Bartlett-Test).

Die Berechnung nach Steiger, 1980 bei multivariat normalverteilten Variablen.

$$df = p \cdot (p-1) / 2$$

$$\chi^2 = (n-3) * \sum_{i=1}^p \sum_{j=i+1}^p z_{ij}^2$$

$z_{ij}$  .. Fisher-Z-Werte für die Korrelationen der Korrelationsmatrix

Ist der  $\chi^2$ -Wert nicht signifikant, sind die Variablen voneinander unabhängig. Ist der  $\chi^2$ -Wert signifikant, kann der erste Faktor extrahiert werden, danach erfolgt eine erneute Überprüfung der

Matrix der Restkorrelationen (die Variableninterkorrelationen werden durch die Ladungen des ersten Faktors reduziert) und eventuell weitere Extraktionen von Faktoren.

### 4. Wofür ist das Measure of Sampling Adequacy (Kaiser-Meyer-Olkin) ein Maß?

Wenn untersucht werden soll, ob die Variablen untereinander linear zusammenhängen, wird das Kaiser-Meyer-Olkin-Maß zur Einschätzung benutzt (auch Anti-Image-Kovarianz). Diese soll einen Wert größer als 0.6 sein.

### 5. Was versteht man unter Kommunalität?

Die **Kommunalität** einer Variablen  $i$  gibt an, in welchem Ausmaß diese Variable durch die Faktoren aufgeklärt bzw. erfaßt wird. Das Quadrat der Ladung  $a_{ij}$  erfaßt den gemeinsamen Varianzanteil zwischen der Variablen  $i$  und dem Faktor  $j$ : Werden die quadrierten Ladungen einer Variable über alle Faktoren summiert erhält man  $h^2$  (welcher Anteil der Varianz einer Variable durch die Faktoren erklärt wird)

In der Hauptkomponentenanalyse wird von Faktoren ausgegangen, die z-standardisiert sind = Varianz der Variablen ist 1. Damit kann die Summe der quadrierten Ladungen einer Variablen nicht größer als 1 werden.

Die einzelnen Variablen werden schon durch wenige Faktoren bis auf unbedeutende Varianzanteile erfaßt, die auf fehlerhafte, systematische Effekte zurückgehen, die Kommunalität  $h^2$  ist deshalb kleiner als 1.

## **6. Was wird unter der Maximum-Likelihood-Methode maximiert?**

Für eine Stichprobe werden mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode Stichprobenkennwerte geschätzt. Diese sollen so beschaffen sein, daß sie die Wahrscheinlichkeit des Auftretens in der Stichprobe mit beobachteten Messungen maximieren. Stichprobenkennwerte sind als Schätzungen für unbekannte Parameter anzusehen. Die Stichprobenkennwerte sollen die gemessenen Beobachtungen so gut als möglich repräsentieren, also die Auftretenwahrscheinlichkeit der beobachteten Messungen für diesen geschätzten Parameter soll maximal sein. Anders: der geschätzte Parameter soll maximal zu den beobachteten Messungen passen.

## **Was sind die Vorteile der Maximum-Likelihood-Methode?**

Für große Stichproben ist der Wert der ML-Funktion  $\chi^2$ -verteilt. Er kann somit inferenzstatistisch abgesichert werden. Sie ist die am häufigsten verwendete Schätzfunktion und liefert die präzisesten Parameterschätzungen. Die Schätzwerte sind effizient, konsistent und suffizient, aber nicht notwendigerweise erwartungstreu.

## **8. Was sind die Voraussetzungen der Maximum-Likelihood-Methode?**

Voraussetzung für die ML-Fitfunktion ist eine multivariate Normalverteilung. Auch ist sie nur ab einer Stichprobengröße  $N=200$  sinnvoll einsetzbar.

## **9. Was überprüft der $\chi^2$ -Test?**

Der  $\chi^2$ -Test kann zur Überprüfung des gesamten Modells eingesetzt werden. Dabei wird ein Vergleich der empirischen Korrelation mit der reproduzierten Korrelation (aus den Parameterschätzungen gewonnen) durchgeführt. Der  $\chi^2$ -Test ist approximativ und überprüft die Güte der Übereinstimmung zwischen beobachteten und reproduzierten Datenpunkten.

Ziel ist eine Beibehaltung der Nullhypothese (die empirischen Korrelationen entsprechen den reproduzierten Korrelationen - aus den Modellparametern gewonnen). Erreicht der  $\chi^2$ -Test einen Wert von Null, zeigt dies eine perfekte Übereinstimmung. Die Nullhypothese soll mit einem genügend kleinen  $\chi^2$ -wert abgesichert werden (hohe Irrtumswahrscheinlichkeit).

Mit dem  $\chi^2$ -Test werden die Wahrscheinlichkeiten multinomialverteilter Ereignisse geschätzt, wobei die Schätzung erst bei unendlich großen Stichproben mit den exakten Wahrscheinlichkeiten der Multinomialverteilung übereinstimmen.

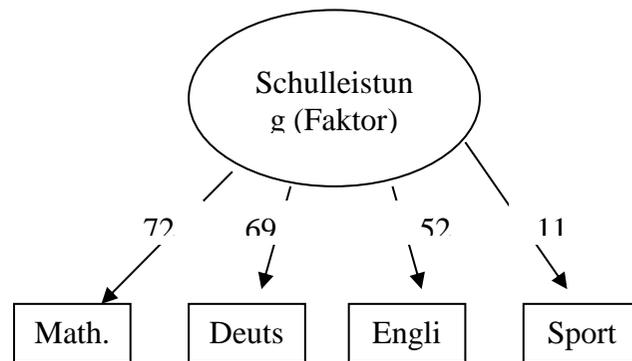
Bei der Durchführung eines  $\chi^2$ -Tests sollten 3 Voraussetzungen erfüllt sein:

die einzelnen Beobachtungen müssen voneinander unabhängig sein  
die Merkmalskategorien müssen so geartet sein, daß jede Beobachtungseinheit einer Merkmalskategorie zugeordnet werden kann.

Bezüglich der Größe der erwarteten Häufigkeiten erweisen sich  $\chi^2$ -Techniken als relativ robust. Trotzdem ist darauf zu achten, daß der Anteil der erwarteten Häufigkeiten, die kleiner als 5 sind, 20% nicht überschreitet.

## **10. Wie wird das Ergebnis einer Faktorenanalyse graphisch dargestellt?**

Schulnote	Faktorladung nach ML-Methode
Mathe	.72
Deutsch	.69
Englisch	.52
Sport	.11



### Übungsaufgaben zur CFA mit LISREL

#### 1. Was wird bei Lisrel unter einer KSI-Variablen verstanden?

Ein KSI-Variable ( $\xi$ ) ist eine latente exogene Variable. Mit *latent* ist gemeint, daß die Variable nicht direkt beobachtbar ist, sondern daß es sich um ein Konstrukt, eine theoretische Größe handelt (z.B. politische Orientierung, Kreativität). Mit *exogen* ist gemeint, daß diese Variablen zur "Erklärung" anderer Variablen (der endogenen Variablen und der x-Indikatoren) herangezogen werden.

#### 2. Was wird bei Lisrel unter einer X-Variable verstanden?

X-Variablen sind beobachtbare Variablen (z.B. ein Fragebogenitem) Ein X-Variable ist in zwei Anteile dekomponierbar: ein Anteil, der durch das Konstrukt determiniert wird, das dieser Variablen zugrunde liegt und ein weiterer Anteil, der auf Meßfehler oder andere Konstrukte zurückzuführen ist. (Bortz, 1993, S. 440) Wie in der KTT????

Merke: Unter einer X-Variable wird bei Lisrel verstanden:  
Indikatoren der KSI-Variablen  
Manifeste (beobachtete) Variable

#### 3. Wie ist die Hauptdiagonale der THETA-DELTA-MATRIX zu interpretieren?

Die THETA-DELTA-MATRIX hat in ihrer Hauptdiagonalen die Meßfehlervarianzen stehen. In den Nebendiagonalen stehen die Meßfehlerkovarianzen.

#### 4. Wie werden die Freiheitsgrade zur $\chi^2$ -Statistik berechnet?

$$df = \frac{p(p+1)}{2} - q$$

p..Anzahl der Variablen in der Stichprobenmatrix

q..Anzahl der gesuchten Parameter

5. *Modifizieren Sie die Syntax so, daß die Items 1, 2 und 3 durch einen Faktor erklärt werden und die restlichen Items durch einen zweiten Faktor. Schließlich sollen die Meßfehler der Items 1 und 2 korreliert sein.*

Konfirmatorische Faktorenanalyse  
 DA NG=1 NI=1 NO=2691 MA=CM  
 LA  
 item1 item2 item3 item4 item5 item6 item7 item8/  
 CM FU FI=matrix.cm  
 MO NX=8 NK=1 LX=FU,FI PH=ST TD=DI,FR  
 LK  
 Faktor1/  
 FR LX 1 1 LX 2 1 LX 3 1 LX 4 1 LX 5 1 LX 6 1 L X 7 1 L X 8 1  
 OU

Korrigiert:  
 DA NG=1 NI=1 NO=2691 MA=CM  
 LA  
 item1 item2 item3 item4 item5 item6 item7 item8/  
 CM FU FI=matrix.cm  
 MO NX=8 NK=2 LX=FU,FI PH=ST TD=**FU,FI**  
 LK  
 Faktor1 **Faktor 2/**  
 FR LX 1 1 LX 2 1 LX 3 1  
**FR LX 4 2 LX 5 2 LX 6 2 L X 7 2 L X 8 2**  
**FR TD 1 1 TD 2 2 TD 3 3 TD 4 4 TD 5 5 TD 6 6 TD 7 7 TD 8 8**  
 Path diagram  
 OU

### Übungsaufgaben zur Vertiefung

1. *Wofür wird der  $\chi^2$ -Test eingesetzt, an welche Voraussetzungen ist er gebunden?*

Mit dem  $\chi^2$ -Test wird der Modellfit getestet (d.h. eine statistische Evaluation wird möglich). Wird der  $\chi^2$ -Wert signifikant, bedeutet das, daß das Modell die gefundenen Werte nicht exakt repräsentiert. Der  $\chi^2$ -Wert sollte möglichst klein ausfallen und nicht signifikant werden, auf keinen Fall sollte er aber größer werden das Fünffache der Anzahl der Freiheitsgrade. Außerdem ist ein großes N unverzichtbar und es muß eine multivariate Normalverteilung vorliegen.

Mit wachsendem Stichprobenumfang erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Nullhypothese verworfen wird. Bei kleineren Stichproben sind die Chancen größer, das Kausalmodell zu bestätigen.

Weiterhin muß das Modell gültig sein und alle Voraussetzungen erfüllt sein. Die Stichprobe soll hinreichend groß sein. Es muß eine multivariate Normalverteilung vorliegen und die ML-Funktion verwendet werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist der  $\chi^2$ -Test als Fitindex zu interpretieren.

2. *Ein Modell weist 30 Freiheitsgrade auf. Es sollen zwei weitere Parameter geschätzt werden. Wie verändert sich die Anzahl der Freiheitsgrade?*

$$df = \frac{p(p+1)}{2} - q$$

p..Anzahl der Variablen in der Stichprobenmatrix  
 q..Anzahl der gesuchten Parameter

$$df = \frac{q(q+1)}{2} - t$$

q... Anzahl der X-Indikatoren  
t... zu schätzende Parameter

Wenn zusätzliche Parameter geschätzt werden, sinkt die Anzahl der Freiheitsgrade und der Modellfit nimmt ab.

**3. Worin besteht der Unterschied zwischen einer „normalen“ LISREL-Lösung und einer vollständig standardisierten Lösung?**

Eine vollständig standardisierte Lösung beinhaltet die Festlegung der Varianz der Indikatoren Eins. Damit erreicht man eine einfachere Interpretation der Faktorladungen. Bei einer nicht standardisierten Lösung müssen die Faktorladungen in Relation zur Varianz der Indikatoren interpretiert werden.

**4. Wie sind die LAMDA-X, die THETA-DELTA und die PHI Matrizen aufgebaut?**

Durch die Lambda-X-Matrix wird festgelegt, welche X-Indikatoren durch welche Faktoren erklärt werden sollen.

Eine Phi-Matrix besteht aus den Varianzen und Kovarianzen der latenten Faktoren. Die Hauptdiagonale kann auf Eins festgelegt werden, somit erhalten die KSI-Variablen eine Varianz von 1.

Die Theta-Delta-Matrix enthält die Fehler und Fehlervarianzen der X-Indikatoren (Operationalisierungen von exogenen Variablen). Meist läßt man nur die Hauptdiagonale der Matrix schätzen.

**5. Wieviele Fehler enthält diese Syntax?**

DA NI=1 NO=1765 MA=KM  
LA  
SE  
1 2 3 4/  
CM FU FI=pa.cm  
MO NX=2 NK=4 LX=FU,FR PH=ST TD=DI,FR  
LK  
SWE PA/  
FR LX 1 1  
FR LX 2 1  
FR LX 3 2  
FR LX 2 4  
OU SC

Korrigiert:

DA NI=4 NO=1765 MA=CM  
LA  
SE  
1 2 3 4/  
CM FU FI=pa.cm  
MO NX=2 NK=4 LX=FU PH=ST TD=DI,FR  
LK  
SWE PA/  
FR LX 1 1  
FR LX 2 1  
FR LX 3 2  
FR LX 2 2  
OU SC

## Übungsaufgaben für die nächste Sitzung

### 1. Was versteht man unter einem kongenerischen Meßmodell, was unter einem tau-äquivalenten, was unter einem parallelen?

Beim kongenerischen Meßmodell werden keine Festlegungen über Meßfehler oder Ladungen vorab getroffen. Anders bei den anderen Modellen. Bei einem tau-äquivalenten Meßmodell werden die Indikatoren gleichgesetzt hinsichtlich ihrer Ladung, jedoch nicht die Meßfehler. Den höchsten theoretischen Gehalt hat das parallele Meßmodell. Hier werden sowohl Indikatoren hinsichtlich ihrer Ladung als auch die Meßfehler gleichgesetzt.

### 2. Welches dieser Meßmodelle weist die meisten Freiheitsgrade auf?

Je weniger Parameter geschätzt werden, umso höher ist die Anzahl der Freiheitsgrade. Somit hat das parallele Modell die meisten Freiheitsgrade.

### 3. Was wird unter einem $\chi^2$ -Differenztest (Wald-Test) verstanden?

Der Wald-Test findet bei Modellen Verwendung, die geschachtelt sind, und die sich nur in der Anzahl der Parameter unterscheiden. Man geht davon aus, daß die Differenz der  $\chi^2$ -Werte der zu vergleichenden Modelle auch  $\chi^2$ -verteilt ist. Auch die Freiheitsgrade berechnen sich aus der Differenz der Freiheitsgrade der zu vergleichenden Modelle. Die Annahme eines spezifischeren Modelles ist umso plausibler, je größer die Differenz der  $\chi^2$ -Werte im Vergleich zu den Freiheitsgraden ist.

(Skript)

### 4. Worauf beziehen sich die „Modification indices“ (MI)?

Modification indices geben an, um welchen Betrag sich der  $\chi^2$ -Wert verbessert, wenn ein weiterer Parameter geschätzt wird. Je mehr Parameter geschätzt werden, desto weniger Freiheitsgrade hat das Modell. Ein  $MI > 15$  weist auf eine möglicherweise notwendige Modellmodifikation hin.

### 5. Es gibt eine ganze Reihe globaler Fitindizes (NFI, PGFI, RMSEA, AIC). Suchen sie sich zwei Indizes heraus, die nicht im Seminar besprochen wurden und beschreiben Sie das Grundprinzip sowie Vor- und Nachteile dieser Indizes!

PGFI und AIC wurden nicht besprochen.

**GFI** (Jöreskog&Sörbom)

- generelle Determinationskoeffiziente
- komplexere Modelle werden bevorzugt

**AGFI** → adjusted GFI

→ Anzahl der df im Vergleich zu df eines Nullmodells berücksichtigt

**NFI** (Bentler&Bonett)

- Differenz  $\chi^2$ -Wert eines Nullmodells und eines  $\chi^2$ -Wertes des aktuellen Modells im Verhältnis zu  $\chi^2$ -Wert des Nullmodells
- $NFI=0$  ← Nullmodell
- $NFI=1$  ← perfektes Modell

**PNFI** → Anzahl der Freiheitsgrade des aktuellen Modells gegenüber Nullmodell

$$df(\text{aktuell})/df(\text{null}) * NFI$$

**RMR** → Maß für Differenz der Stichprobenmatrix und aus Modell reproduzierten Matrix

→ Interpretation als durchschnittliches Residuum nach Fitprozeß

**SRMR** → soll kleiner sein als 0.05

**PGFI** → eine weitere Adjustierung des GFI, ist ein Maß für die Parsimonie eines Modells, seine Werte können zwischen 0 und 1 liegen; höhere Werte bedeuten mehr Parsimonie

(Parsimonie: Einfachheit eines Modells: ein Model sollte so einfach wie möglich und so kompliziert wie nötig gehalten werden. das bedeutet einen größeren Fit pro benutztem Freiheitsgrad)

$$PGFI = GFI \cdot \frac{df_{pm}}{0.5 \cdot \text{Anzahl der manifesten Variablen} \cdot (\text{Anzahl der manifesten Variablen} + 1)}$$

**AIC** → vergleicht die Parsimonie von Modellen mit unterschiedlichen vielen Konstrukten: geht der Wert gegen 0, steigt gleichzeitig der Fit und die Parsimonie des Modells

$$AIC = \chi^2 + 2 \cdot \text{Anzahl der geschätzten Parameter}$$

### Übungsaufgaben Modell-Fit

1. *Im folgenden werden 3 Modell-Varianten beschrieben. Welches ist die beste Variante und warum? Was kann mit dem RMSEA überprüft werden?*

x2(df)	p	x2Diff	p	GFI	RMSEA	p
--------	---	--------	---	-----	-------	---

A	2087(27)	0.00	-	-	.63	.310	.00
B	83(21)	.00	2004(6)	<.01	.98	.060	.08
C	34(9)	.00	40(12)	<.01	.99	.059	.22

Variante A hat einen viel zu großen  $\chi^2$ -Wert, deshalb bietet sich Variante A nicht an. Variante B und C haben einen akzeptablen  $\chi^2$ -Wert. Der GFI-Wert ist bei Variante A und B ebenfalls gut, jedoch liegt auch hier das Modell C (wenn auch nur knapp vor B) vorn. Der RMSEA ist bei Variante C am besten. Aufgrund dieser Werte ist Variante B die beste.

Mit dem RSMR wird dem Vergleich die Quadratwurzel der Mittelwerte der Quadrierten Residuen zugrundegelegt. Beim RSMSEA bezieht sich die Prognose auf den Unterschied zwischen Modell und Population. Beim RSMR dagegen auf den Unterschied zwischen Modell und Stichprobe.

### 2. Was versteht man unter einem Identifikationsproblem und welche Lösungen gibt es dafür?

Unter dem Identifikationsproblem versteht man die Frage, ob eine Lösung mathematisch eindeutig ist oder nicht. Für die Identifikation einer Lösung benötigt man eine positive Anzahl ( $df \geq 0$ ) von Freiheitsgraden (notwendige Bedingung). Die Anzahl der Freiheitsgrade sollte der Anzahl der zu schätzenden Parameter entsprechen.

Eine weitere Bedingung ist die lineare Unabhängigkeit der zu schätzenden Gleichungen.

Aber auch dann kann nicht immer entschieden werden, ob die Lösung mathematisch eindeutig ist, daher wird bei LISREL eine Heuristik verwendet, um das Identifikationsproblem aufzuspüren.

Vorgehen:

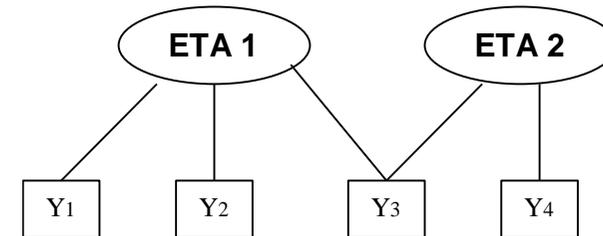
Es können unterschiedliche starting values festgelegt werden. Von diesen ausgehend werden in einem iterativen Prozeß die Koeffizienten geschätzt. Werden bei unterschiedlichen starting values unterschiedliche Koeffizienten berechnet, dann hat man ein Identifikationsproblem (Lisrel zeigt an: „matrix not positive definite“). Oder es können den Parametern eines Modells Werte zugewiesen werden, die etwas von den mit Lisrel geschätzten abweichen. Wenn sich der Modellfit verschlechtert, ist ein Identifikationsproblem wahrscheinlich.

### Übungsaufgaben: Vollständiges Modell

1. Was wird unter einer endogenen Variablen verstanden, und wie wird sie in der Lisrel-Syntax genannt?

Eine endogene Variable kann, im Gegensatz zu einer exogenen Variablen, sowohl als AV, als auch als UV fungieren. Sie ist nicht direkt beobachtbar und wird über manifeste Variablen operationalisiert. Endogene Variablen werden im LISREL-Ansatz als ETA-Variablen bezeichnet.

2. Worin unterscheiden sich X- und Y-Indikatoren? Y-Indikatoren stellen die Operationalisierungen der endogenen ETA-Variablen dar. X-Indikatoren bilden die Operationalisierungen der exogenen KSI-Variablen.



3. Gegeben sei folgendes Modell: Die erste endogene Variable wird mit drei Indikatoren gemessen, die zweite endogene Variable mit zwei. Beide endogene Variablen teilen sich dabei einen Indikator (dirty indicator). Notieren Sie die Lambda-Y-Matrix!

LAMBDA-Y-Matrix:

	ETA 1	ETA 2
Y1	X	-
Y2	X	-
Y3	X	X
Y4	-	X

4. Interpretieren Sie die PSI-Matrix: Welche Bedeutung hat die Hauptdiagonale?

Die PSI-Matrix enthält die Kovarianzen der Meßfehler der ETA-Variablen. In der Hauptdiagonale findet man die Varianzen der Meßfehler bzw. die geschätzten Varianzanteile der ETA-Variablen.

5. Ein Strukturgleichungsmodell habe fünf X-Indikatoren und drei Y-Indikatoren. Sieben Parameter sollen geschätzt werden. Berechnen Sie die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade!

$$df = \frac{p(p+1)}{2} - q$$

$$df = \frac{8(8+1)}{2} - 7$$

$$df = 29$$

p... Anzahl der Variablen in der Stichprobenmatrix

q... Anzahl der zu schätzende Parameter

6. Zwei Modelle weisen einen vergleichbaren globalen Modellfit auf, z.B. GFI=.90. Modell A weist zudem gegenüber Modell B mehr Freiheitsgrade auf. Für welches Modell entscheiden Sie sich?

Man würde sich für das Modell A entscheiden, da es mehr Freiheitsgrade aufweist. Dieses Modell ist das einfachere und ist daher leichter falsifizierbar als das Modell B, das weniger Freiheitsgrade hat.

## Übungsaufgaben Multi Group

1. Erklären Sie das Prinzip einer Analyse von mehreren Gruppen mit der Multi Group Option!

Mit der Methode der Mehrgruppenvergleiche können Variablenzusammenhänge in unterschiedlichen Stichproben simultan untersucht werden. Es eignet sich daher gut für kulturvergleichende Studien.

Nach Festlegung der Anzahl der Gruppen mit NG in der DA-Zeile erwartet Lisrel mehrere Submodelle. Jedes Submodell muß mit einer DA-Zeile beginnen. Sollen jeweils in den Submodellen die gleichen Parameter geschätzt werden, muß das mit SP (für same pattern) angegeben werden (z.B. LX=SP).

Bei Lisrel wird ein Modellfit berechnet, der sich auf alle Submodell bezieht (alles Skript).

2. Was versteht man unter einer COMMON METRIC STANDARDIZED SOLUTION? Welche vergleichenden Aussagen sind jetzt möglich?

Alle Gruppen werden in einer gemeinsamen Metrik dargestellt, d.h. auf eine gemeinsame Einheit standardisiert, damit sind Vergleiche verschiedener Gruppen möglich. Am Ende erhält man aus den Stichprobenmatrizen eine Kovarianzmatrix, dies ist die Ausgangsbasis für LISREL.

3. Was ist der Unterschied zwischen einer WITHIN GROUP COMPLETELY STANDARDIZED SOLUTION und einer COMMON METRIC STANDARDIZED SOLUTION?

Bei der *Within Group completely standardized solution* werden beide Gruppen unabhängig von einander standardisiert und bei der Common. metric stand. solution wird über beide Gruppen standardisiert (also über alle Daten).

Die Gruppen können nur verglichen werden, wenn sie die gleiche Metrik haben, also standardiert sind.

### **Within Group completely standardized solution:**

→standardisierte Lösung im Submodell:

bedeutet eine Standardisierung der Ksi-Variablen, Phi ist dann eine Korrelationsmatrix

in der OU-Zeile als SS angegeben (wird eigentlich nicht gemacht, da man das auch als PH=ST in der MO-Zeile angeben kann)

→ die latenten Variablen wird standardisiert, nicht aber die beobachteten Variablen (die Indikatoren)

Bei der Group completely standardized solution werden die Varianzindikatoren auf 1 gesetzt.

→completely standardized solution:

→beobachtete und latente Variablen sind standardisiert

MA=KM in der DA-Zeile

und PH=ST in der MO-Zeile

(beides Jöreskog&Sörbom, 1989, Lisrel: A guide to the program and application (2end edition))

### **4. Mit welchem Befehl setzt man eine Matrix über mehrere Gruppen invariant?**

Die Matrix wird mit dem Befehl IN (invariant) invariant gesetzt. Die Parameter werden über die Gruppen gleichgesetzt, damit ist die Korrelation zwischen latenten Variablen in den Subgruppen (den unterschiedlichen Stichproben) identisch. (vgl. Skript)

## **Längsschnittliche Modelle**

### **1. Was versteht man unter einer Cross-Lagged-Panel Design?**

Das CLP Design ist ein korrelatives Design, das auf Längsschittuntersuchungen basiert. Ziel ist es, durch eine Analyse der Korrelationen zwischen verschiedenen Variablen zu unterschiedlichen Meßzeitpunkten, Hypothesen möglicher lineare Kausalzusammenhänge zu falsifizieren bzw. über die Plausibilität von zwei konkurrierenden Kausalhypothesen zu entscheiden. Es sollte jedoch betont werden, daß es nicht möglich ist, kausale Zusammenhänge mit dieser Methode zu beweisen. Ergebnisse, die mit dieser Methode gewonnen werden, schließen weitere Erklärungen bzw. Hypothesen nicht aus. (vgl. Bortz, 1996, S. 486) Ferner sind noch zwei Annahmen erwähnenswert, die mit dem CPL Design verbunden sind:

- (a) Die Hypothesen über kausale Zusammenhänge basieren auf der Annahme, daß die Wirkung stets zeitlich der Ursache folgt.
- (b) Die Hypothesen über kausale Zusammenhänge basieren auf der Annahme, daß eine linearer Beziehung bestehen muß.

Zur Annahme (a) ist kritisch anzumerken, daß es andere Kausalmodelle gibt. Ein zeitliche Priorität der Ursache muß nicht postuliert werden. Warum sollte Ursache und Wirkung nicht zur gleichen Zeit stattfinden?

Zur Annahme (b) sei hier kritisch ergänzt, daß es auch nichtlineare kausale Beziehungen geben kann. Prüfungsangst und Prüfungsleistung könnte in diesem Zusammenhang als Beispiel für einen parabolischen Zusammenhang gegeben werden. Ein mittleres Ausmaß an Prüfungsangst würde dann mit hoher Leistung und hohen wie geringen Ausprägungen der Ängste zu schlechteren Leistungen führen.

## 2. Welche Fragestellung versucht man mit einem CLP Design zu beantworten ?

Mit dem CLP Design wird versucht, die Plausibilitätsfrage (von jeweils zwei) konkurrierender Kausalhypothesen zu klären.

Gehen wir davon aus, daß eine Korrelation eine notwendige Bedingung für einen kausalen Zusammenhang ist, dann muß die Korrelation zwischen zwei Variablen hoch sein, wenn zwischen ihnen ein (linearer) kausaler Zusammenhang besteht. Die Korrelation allein gibt nur einen Aufschluß über die Möglichkeit kausaler Zusammenhänge, bzw. könnte eine Korrelation von Null eine (lineare) Kausalhypothese falsifizieren. Eine hohe Korrelation gibt keinen Aufschluß über die Beeinflussungsrichtung (noch ob es eine direkte Beziehung zwischen den Variablen gibt).

Eine (signifikante) Korrelation zwischen zwei Variablen (x und y) läßt beispielsweise folgende (lineare) Kausalmodelle zu:

1. x beeinflußt y kausal (Motivation beeinflußt die Leistung)
2. y beeinflußt x kausal (Leistung beeinflußt die Motivation)
3. Zwischen x und y besteht keine kausale Relation, die Korrelation ist durch die Variable z bedingt. (Zwischen Motivation und Leistung besteht keine kausale Relation, beide Variablen werden durch Intelligenz beeinflußt.) (vgl. Bortz, 1993, S. 437)

Mit dem CPL- Design ist es möglich Plausibilitätskriterien zur Ablehnung einer der konkurrierenden Kausalhypothesen (Beispiel 1 und 2) anzugeben, damit dient sie zur Ergründung der Beeinflussungsrichtung der Variablen.

Hierzu werden vor allem zwei Korrelationen berücksichtigt:

- (a) Die Motivation beeinflußt die Leistung: Motivation zu  $t_1$  mit Leistung zu  $t_2$
- (b) Die Leistung beeinflußt die Motivation: Leistung zu  $t_1$  mit Motivation zu  $t_2$

Ausgehend von einem Kausalmodell, daß eine zeitliche Priorität der Ursache postuliert, können auf Grund dieser Korrelationen Angaben gemacht werden, die eine richtungsweisende Antwort auf die Frage geben, welche Variable von welcher beeinflußt wird. (siehe hierzu auch Abbildung unten)

## 3. Was sind Autoregressionen?

Die Berechnung der Regressionsgraden einer Autoregression ist analog zu einer Regressionsgleichung mit unterschiedlichen Variablen (x und y).

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + a$$

$\phi_1$  ... (griech.: phi) Enge des Zusammenhanges ... (Steigung bei unstandardisierten Werten)

$x_t$  ... Messung zum Zeitpunkt t des Merkmals x

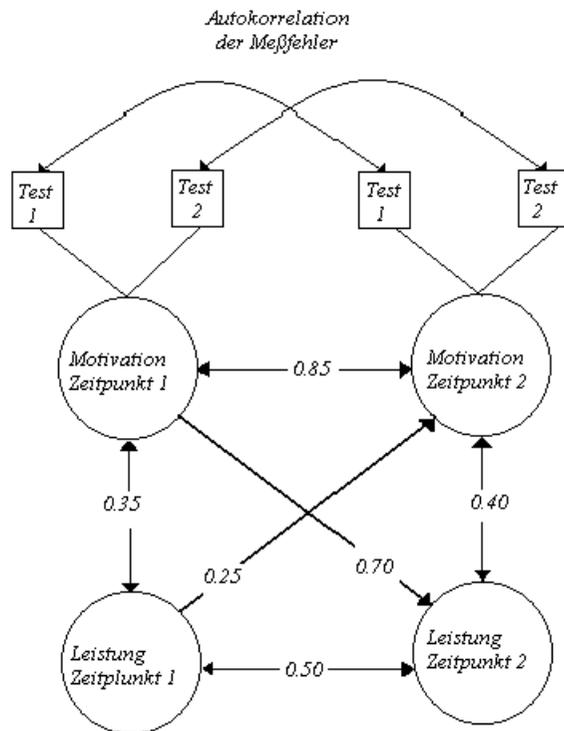
$x_{t-1}$  ... Messung zum Zeitpunkt t-1 (t-1 ist früher als t)

a ... Um Null normalverteilte Zufallskomponente

(vgl. Bortz, 1996, S. 533)

#### 4. Was ist eine Autokorrelation? Was bedeuten autokorrelierte Meßfehler?

"Korrelationen, die man durch zeitliche Versetzungen der Meßwerte einer Zeitreihe errechnet, heißen Autokorrelationen." (Bortz, 1995, S. 533)



Eine andere Bestimmung der Autokorrelation findet man bei Backhaus et al. (1996): "Das lineare Regressionsmodell basiert auf der Annahme, daß die Residuen in der Grundgesamtheit unkorreliert sind. Wenn diese Bedingung nicht gegeben ist, sprechen wir von Autokorrelation [der Residuen bzw. der Meßfehler]." (S. 34)

Korrelieren die Differenz zwischen den geschätzten und den Beobachtungswerten einer Variablen, die zu zwei Meßzeitpunkten erhoben wurde, dann ist davon auszugehen, daß es eine weitere (latente) Variable gibt, die diesen Zusammenhang aufklären kann. Noch einmal zu Beispiel 3: Messen wir die Motivation (m) und die Schulleistung (s) über viele Personen zu jeweils zwei Zeitpunkten, so muß die Korrelation  $r_{m1s2}$  kleiner der Korrelation  $r_{m2s1}$  sein. ( $r_{m1s2}$  bedeutet, daß die Motivationswerte zum ersten Meßzeitpunkt mit den Leistungswerten zum zweiten Meßzeitpunkt korreliert wurden und für  $r_{m2s1}$  gilt, daß die schulischen Leistungen vor der Motivation erhoben wurden.)

Abbildung (oben): In diesem Beispiel konkurrieren die Kausalhypothesen (a) die Motivation beeinflusst die Leistung und (b) die Leistung beeinflusst die Motivation. Die Hypothese (a)

#### 5. Welche Schwierigkeiten gibt es bei der Interpretation von Cross-Lagged-Panel Effekten?

Es gibt eine ganze Reihe sehr unterschiedlicher Schwierigkeiten, von denen hier nur einige kurz angesprochen werden können:

Ein Problem der Interpretation von CLP-Effekten wurde bereits angesprochen - die theoretischen Annahmen zur Kausalität (Linearität und zeitliche Priorität der Ursache). Mit dem CLP-Design werden also nur ganz bestimmte kausale Zusammenhänge untersucht.

Im folgenden sollen einige der Probleme, die angesichts der Komplexität von Panelstudien auftreten, noch angesprochen werden:

Ein Problem könnten z.B. Lern-Effekte sein, die von der Anzahl der Erhebungen und den zeitlichen Abständen zwischen den einzelnen Erhebungen abhängen. (vgl. Stier, 1996, S. 230) Ebenso kann bereits das Bewußtsein, Mitglied eines Panels zu sein, das alltägliche Verhalten betreffs der Befragungssituation entscheidend beeinträchtigen. (vgl. Bortz, 1995, S. 421)

Ferner kann es natürlich zu Schwierigkeiten kommen, wenn zum zweiten oder späteren Zeitpunkten der Meßwiederholung Personen nicht mehr befragt werden können (Mortalitätsproblem). Es wird hier zwischen "zufälligen" Ausfällen (z.B. Krankheit, Tod) und "systematischen" Ausfällen (z.B. mangelndes Interesse, Verärgerung über die Untersuchung) unterschieden. Dabei sind natürlich die Systematischen Ausfälle besonders problematisch, da sie oft mit dem erhobenen Merkmal konfundiert sind. (vgl. Stier, 1996, S. 230)

Zur Kontrolle der Panel-Effekte werden aufwendige Austausch- und Rotationspläne entwickelt z.B. in welchen zeitlichen Abständen und in welchem Umfang *alte* Panelmitglieder auszutauschen und durch *neue* Mitglieder zu ersetzen sind. (vgl. Bortz, 1995, S. 421)

## **6. Können mit dem CLP Design Effekte auf Veränderungen untersucht werden?**

Wie bereits gesagt ist ein Panel-Design eine bestimmte Form der Längsschnittuntersuchung, bei der in bestimmten zeitlichen Abständen bei denselben Untersuchungseinheiten dieselben Merkmale bzw. Variablen erhoben werden. Damit liegt die

Zielsetzung auf der Hand. Es handelt sich um ein Forschungsdesign, das zur Informationsgewinnung von Veränderungen bzw. Wandlungsprozessen herangezogen werden kann. (vgl. Stier, 1996, S.228)

Beispiel: Wenn zwischen den ersten und zweiten Meßzeitpunkte keine Veränderung stattgefunden hat, dann muß die Autokorrelation der Meßwerte einer Variable (z.B. Leistung zum ersten und zweiten Meßzeitpunkt) hoch sein.

### Literatur:

- Bortz, J.: Statistik für Sozialwissenschaftler. Springer. Berlin 1993.  
Bortz, J., Döring, N.: Forschungsmethoden und Evaluation. Springer. Berlin. 1995.  
Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W.: Multivariate Analysemethoden. Springer. Berlin. 1996.  
Stier, W.: Empirische Forschungsmethoden. Springer. Berlin. 1996.